

Analisis Variansi

Statistika I (Inferensi)

Analisis Variansi

- Analisa variansi (ANOVA) adalah suatu metoda untuk menguji hipotesis kesamaan rata-rata dari tiga atau lebih populasi.
- Asumsi
 - Sampel diambil secara random dan saling bebas (independen)
 - Populasi berdistribusi berdistribusi Normal
 - Populasi mempunyai kesamaan variansi

Analisis Variansi

- Misalkan kita mempunyai k populasi.
- Dari masing-masing populasi diambil sampel berukuran n .
- Misalkan pula bahwa k populasi itu bebas dan berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu_1, \mu_2, \dots$ dan μ_k dan variansi σ^2 .
- Hipotesa :
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$
 $H_1 : \text{Ada rata-rata yang tidak sama}$

Analisis Variansi

	Populasi						Total
	1	2	...	i	...	k	
	x_{11}	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{k1}	
	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{k2}	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{in}	...	x_{kn}	
Total	$T_{1\bullet}$	$T_{2\bullet}$	...	$T_{i\bullet}$	...	$T_{k\bullet}$	$T_{\bullet\bullet}$

$T_{i\bullet}$ adalah total semua pengamatan dari populasi ke- i

$T_{\bullet\bullet}$ adalah total semua pengamatan dari semua populasi

Rumus Hitung Jumlah Kuadrat

$$\text{Jumlah Kuadrat Total} = \text{JKT} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{nk}$$

$$\text{Jumlah Kuadrat Perlakuan} = \text{JKP} = \frac{\sum_{i=1}^k T_{i.}^2}{n} - \frac{T_{..}^2}{nk}$$

$$\text{Jumlah Kuadrat Galat} = \text{JKG} = \text{JKT} - \text{JKP}$$

Tabel Anova dan Daerah Penolakan

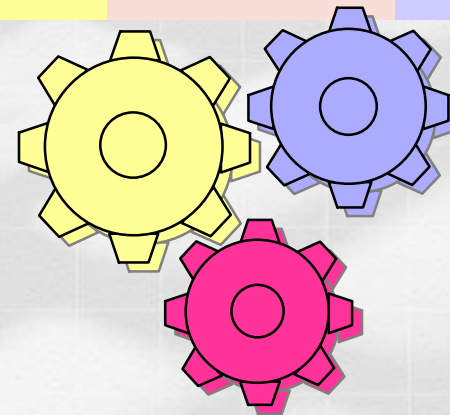
Sumber Variasi	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat Rata-rata	Statistik F
Perlakuan	$k - 1$	JKP	$KRP = JKP / (k - 1)$	$F = KRP / KRG$
Galat	$k(n-1)$	JKG	$KRG = JKG / (k(n-1))$	
Total	$nk - 1$	JKT		

H_0 ditolak jika $F > F(\alpha; k - 1; k(n - 1))$

Contoh 1

Sebagai manager produksi, anda ingin melihat mesin pengisi akan dilihat rata-rata waktu pengisiannya. Diperoleh data seperti di samping. Pada tingkat signifikansi 0.05 adakah perbedaan rata-rata waktu ?

<u>Mesin1</u>	<u>Mesin2</u>	<u>Mesin3</u>
25.40	23.40	20.00
26.31	21.80	22.20
24.10	23.50	19.75
23.74	22.75	20.60
25.10	21.60	20.40



Penyelesaian

❖ Hipotesa :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

H_1 : Ada rata-rata yang tidak sama

❖ Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

❖ Karena df_1 = derajat bebas perlakuan = 2 dan df_2 = derajat bebas galat = 12, maka $f(0.05;2;12) = 3.89$.

Jadi daerah pelokannya:

H_0 ditolak jika $F > 3.89$

Data

	Populasi			Total
	1	2	3	
	25.40	23.40	20.00	
	26.31	21.80	22.20	
	24.10	23.50	19.75	
	23.74	22.75	20.60	
	25.10	21.60	20.40	
Total	124.65	113.05	102.95	340.65

Jumlah Kuadrat Total

$$\begin{aligned} JKT &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{nk} \\ &= 25.40^2 + 26.31^2 + 24.10^2 + 23.74^2 + 25.10^2 + \\ &\quad 23.40^2 + 21.80^2 + 23.50^2 + 22.75^2 + 21.60^2 + \\ &\quad 20.00^2 + 22.20^2 + 19.75^2 + 20.60^2 + 20.40^2 \\ &\quad - \frac{340.65^2}{5 \times 3} \\ &= 58.2172 \end{aligned}$$

Jumlah Kuadrat Perlakuan dan Jumlah Kuadrat Galat

$$\begin{aligned} JKP &= \frac{\sum_{i=1}^k T_i^2}{n} - \frac{T_{..}^2}{nk} \\ &= \frac{124.65^2 + 113.05^2 + 102.95^2}{5} - \frac{340.65^2}{5 \times 3} \\ &= 47.1640 \end{aligned}$$

$$JKG = 58.2172 - 47.1640 = 11.0532$$

Tabel Anova dan Kesimpulan

Sumber Variasi	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Rata-rata	Statistik F
Perlakuan	3-1=2	47.1640	23.5820	F = 25.60
Galat	15-3=12	11.0532	0.9211	
Total	15-1=14	58.2172		

Karena $F_{hitung} = 25.60 > 3.89$ maka H_0 ditolak.
Jadi ada rata-rata yang tidak sama.

Rumus Hitung Jumlah Kuadrat

Untuk ukuran sampel yang berbeda

$$\text{Jumlah Kuadrat Total} = \text{JKT} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$$

$$\text{Jumlah Kuadrat Perlakuan} = \text{JKP} = \sum_{i=1}^k \frac{T_{i.}^2}{n_i} - \frac{T_{..}^2}{N}$$

$$\text{Jumlah Kuadrat Galat} = \text{JKG} = \text{JKT} - \text{JKP}$$

$$\text{dengan } N = \sum_{i=1}^k n_i$$

Tabel Anova

Untuk ukuran sampel yang berbeda

Sumber Variasi	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat Rata-rata	Statistik F
Perlakuan	$k - 1$	JKP	$KRP = JKP / (k - 1)$	$F = KRP / KRG$
Galat	$N - k$	JKG	$KRG = JKG / (N - k)$	
Total	$N - 1$	JKT		

Contoh 2

- Dalam Sebuah percobaan biologi 4 konsentrasi bahan kimia digunakan untuk merangsang pertumbuhan sejenis tanaman tertentu selama periode waktu tertentu. Data pertumbuhan berikut, dalam sentimeter, dicatat dari tanaman yang hidup.
- Apakah ada beda pertumbuhan rata-rata yang nyata yang disebabkan oleh keempat konsentrasi bahan kimia tersebut.
- Gunakan signifikansi 0,05.

Konsentrasi			
1	2	3	4
8.2	7.7	6.9	6.8
8.7	8.4	5.8	7.3
9.4	8.6	7.2	6.3
9.2	8.1	6.8	6.9
	8.0	7.4	7.1
		6.1	

Penyelesaian

❖ Hipotesa :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

H_1 : Ada rata-rata yang tidak sama

❖ Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

❖ Karena df_1 = derajat bebas perlakuan = 3 dan df_2 = derajat bebas galat = 16, maka $f(0.05;3;16) = 3.24$.

Jadi daerah pelokannya:

H_0 ditolak jika $F > 3.24$

Data

	Populasi				Total
	1	2	3	4	
	8.2	7.7	6.9	6.8	
	8.7	8.4	5.8	7.3	
	9.4	8.6	7.2	6.3	
	9.2	8.1	6.8	6.9	
		8.0	7.4	7.1	
			6.1		
Total	35.5	40.8	40.2	34.4	150.9

Jumlah Kuadrat Total

$$\begin{aligned} JKT &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} \\ &= 8.2^2 + 8.7^2 + 9.4^2 + 9.2^2 + 7.7^2 + 8.4^2 + 8.6^2 \\ &\quad + 8.1^2 + 8.0^2 + 6.9^2 + 5.8^2 + 7.2^2 + 6.8^2 + 7.4^2 \\ &\quad + 6.1^2 + 6.8^2 + 7.3^2 + 6.3^2 + 6.9^2 + 7.1^2 - \frac{150.9^2}{20} \\ &= 19.350 \end{aligned}$$

Jumlah Kuadrat Perlakuan dan Jumlah Kuadrat Galat

$$\begin{aligned} JKP &= \sum_{i=1}^k \frac{T_{i\cdot}^2}{n_i} - \frac{T_{\cdot\cdot}^2}{N} \\ &= \frac{35.5^2}{4} + \frac{40.8^2}{5} + \frac{40.2^2}{6} + \frac{34.4^2}{5} - \frac{150.9^2}{20} \\ &= 15.462 \end{aligned}$$

$$JKG = 19.350 - 15.462 = 3.888$$

Tabel Anova dan Kesimpulan

Sumber Variasi	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Rata-rata	Statistik F
Perlakuan	4-1=3	15.462	5.154	F = 21.213
Galat	20-4=16	3.888	0.243	
Total	20-1=19	19.350		

Karena $F_{hitung} = 21.213 > 3.24$ maka H_0 ditolak.
Jadi ada rata-rata yang tidak sama.

Latihan 1

Seorang kontraktor di bidang jenis jasa pengangkutan ingin mengetahui apakah terdapat perbedaan yang signifikan pada kapasitas daya angkut 3 merk truk, yaitu Mitsubishi, Toyota dan Honda. Untuk itu kontraktor ini mengambil sampel masing-masing 5 truk pada tiap-tiap merek menghasilkan data seperti disamping.

Jika ketiga populasi data tersebut berdistribusi normal dan variansi ketiganya sama, uji dengan signifikansi 5% apakah terdapat perbedaan pada kualitas daya angkut ketiga merk truk tersebut

Kapasitas		
Mitsubishi (A)	Toyota (B)	Honda (A)
44	42	46
43	45	47
48	44	45
45	45	44
46	44	43

Latihan 2

Seorang guru SMU mengadakan penelitian tentang keunggulan metode mengajar dengan beberapa metode pengajaran. Bila data yang didapat seperti pada tabel disamping, ujilah dengan signifikansi 5% apakah keempat metode mengajar tersebut memiliki hasil yang sama? (asumsikan keempat data berdistribusi Normal dan variansisnya sama)

Metode			
A	B	C	D
70	68	76	67
76	75	87	66
77	74	78	78
78	67	77	57
67	57	68	
89			